Tentamen Dynamisch Systeem

V.Naudot & R. Vitolo.

December 5, 2002

Bij het beantwoorden van vragen, argumenten moeten **duidelijk en logisch** gescgreven zijn. In alle vraagstukken, de ruimte $\mathbb{R}^n$ is voorzien van de standaard Euclidische norm.

<u>VRAAG I (COLLEGE-STOF)</u>: Zij $\Phi : \mathbf{K} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ een gladde afbeelding

$\triangleright$ Laat $p = n$. Geef de betekenis van de volgende uitspraak: "Φ is een **hyperbolische diffeomorphisme**".

$\triangleright$ Neem weer aan dat $p = n$. "$P \in \mathbf{K}$ is een recurrent punt". Wat betekent dat?

$\triangleright$ Stel dat $n = 1$. Wat zegt de **Impliciet Functie Stelling**?

<u>VRAAG II</u>: Becshouw de volgende differentieelvergelijkingen:

$$\mathcal{X}_b : \begin{cases} \dot{x} &= y^2 \\ \dot{y} &= x^2 + bxy \end{cases} \tag{1}$$

$\triangleright$ Neem $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Druk vergelijken (1) nu uit in poolcoordinaten. Vind een vectorveld $\mathcal{Y}_b$ zo dat $\mathcal{Y}_b$ equivalent met $\mathcal{X}_b$.

$\triangleright$ Laat eerst zien dat er een uniek $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ bestaat zodat

$$\cos^3\theta_0 = \sin\theta_0.$$

Bepaal voor het geval $b = -1$ de verzameling van de singulariteiten in de opgeblazen ruimte ("the blown-up space").

$\triangleright$ Bepaal de aarde van de singulariteiten in het geval waarbij $b = -1$.

$\triangleright$ Neem nu aan dat $b \sim -1$. Laat zien dat er een gladde functie $\alpha(b)$ bestaat zodanig dat $\alpha(-1) = \theta_0$ and dat $\cos^3\Big(\alpha(b)\Big) = \sin\Big(\alpha(b)\Big)$. Bepaal de aarde van de singulariteiten in dit geval.

▷ Teken een lokale faseportret van (1) in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$.

VRAAG III: Beschouw de volgende vectorveld op $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2 + 4x - \frac{11}{3} + y \\ \dot{y} &= 3y^2 + 2y + \varepsilon + \log\Big(\exp|\frac{x}{3x - 3\varepsilon}|\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

where, $x \neq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

▷ Laat zien dat er $\mathcal{X}$ geen singulariteiten heeft.

▷ Neem aan dat $\Gamma = \{\Gamma(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ is een baan van $\mathcal{X}$. Laat zien dat Γ geen periodieke baan is van $\mathcal{X}$.

▷ Neem nu aan dat Γ is een recurrente baan.

▷ ▷ Laat zien dat er een begrensde gebied $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ invariant onder de flow.

▷ ▷ Laat zien dat zulk gebied niet bestaat.

▷ ▷ Laat zien met behulp van een andere argument dat er geen recurrente banen bestaan.

VRAAG IV. Beschouw de volgende vergelijking:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} &=& \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2y + \sqrt{2}x^3y^2 \\ \dot{y} &=& -y - 3xy - 3x^2y^3 - x^6y^7 \end{array} \right. \tag{3}$$

▷ Toon aan dat $(0, 0)$ is een geisoleerde singulariteit;

▷ Schrijf (3) in zijn Poincaré-Dulac normale vorm in een punt $(0, 0)$.